Applications multilinéaires

23 novembre 2020

1 Applications multilinéaires

2 Forme bilinéaire

3 Matrice d'une forme bilinéaire

1 Applications multilinéaires.

Dans tout ce chapitre le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1.1. Applications multilinéaires.

Définition 1.1

Soient $E_1, ..., E_n$ et F des espaces vectoriels sur K.
Une application $f : E_1 \times .... \times E_n \to F$ est dite multilinéaire (ou n-linéaire) si :
Pour tout $j \in \{1...n\}$ et pour tout $x_1, ...x_{j-1}, x_{j+1}, ...x_n$, l'application de E_j vers F défini par
$y \longrightarrow f(x_1, ...x_{j-1}, y, x_{j+1}, ...x_n)$ est linéaire.

($*$) Si $E_1 = ... = E_n = E$, on dit que f est une application n-linéaire sur E.
($*$) Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire.
($*$) On note $\mathfrak{L}_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires de E dans F.
($*$) On note $\mathfrak{L}_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires sur E. c-à-d $\mathfrak{L}_n(E, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}_n(E)$.
Remarque : si $n = 1$, on retrouve $\mathfrak{L}(E, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}(E)$.

Définition 1.2 (Symétrie- antisymétrie)

Une application $f \in \mathfrak{L}_n(E, F)$ est dite :

1. symétrique si l'échange de deux vecteurs ne modifie pas l'image (le résultat),
   c-à-d $f(x_1, ...x_j, ..., x_i, ...x_n) = f(x_1, ...x_i, ..., x_j, ...x_n)$ pour tout $i, j = 1....n$.
2. antisymétrique si l'échange de deux vecteurs a pour effet de changer le résultat obtenu en son opposé,
   c-à-d $f(x_1, ...x_j, ..., x_i, ...x_n) = -f(x_1, ...x_i, ..., x_j, ...x_n)$ pour tout $i, j = 1....n$.
3. alternée si $i \neq j$ et $x_i = x_j$ on a $f(x_1, ...x_j, ..., x_i, ...x_n) = 0$.

Notation

1. $S_n(E,F)$ = l'ensemble des applications n-linéaires symétriques de E dans F.
2. $A_n(E,F)$ = l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E dans F.
3. $S_n(E)$ (resp. $A_n(E)$) = l'ensemble des formes n-linéaires symétriques (resp. alternées) sur E.

Remarque 1.3

Si $n > 2$, il ne faut pas confondre entre :
$\mathfrak{L}(E_1, ..., E_n, F)$: l'ensemble des applications multilinéaires ;
$\mathfrak{L}(E_1 \times .... \times E_n, F)$: l'ensemble des applications linéaires de $E_1 \times .... \times E_n$ dans F.

Exemple :
$\psi : \quad E \times E \longrightarrow E$ telle que $\psi(x, y) = x$, est une application linéaire mais pas bilinéaire.

proposition 1.4

Soit f une application n-linéaire.
f est alternée $\iff$ f est antisymétrique.

Preuve :

2. Forme bilinéaire

2.1. Forme bilinéaire.

Définition 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
Une forme bilinéaire sur E est une application $\phi : \quad E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

1. ϕ est linéiare à gauche :
   $\phi(x, \alpha y_1 + y_2) = \alpha\phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$, pour tout $x, y_1, y_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$
2. ϕ est linéiare à droite :
   $\phi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$, pour tout $y, x_1, x_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

Soit ϕ : $E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.
$(*)$ ϕ est dite **symétrique** si $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ pour tout $x, y \in E$.
$(*)$ ϕ est dite **antisymétrique** si $\phi(x,y) = -\phi(y,x)$ pour tout $x, y \in E$.
$(*)$ ϕ est dite **alternée** si $\phi(x,x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Notation.

$(*)$ $\mathfrak{L}_2(E) = \mathfrak{L}(E,E,\mathbb{K})$ = l'ensemble des formes bilinéaires sur E.
C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(*)$ $S_2(E)$ = l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.
$(*)$ $A_2(E)$ = l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E.

D'après la Proposition 1.4 on a :

Proposition 2.2.

Soit ϕ une forme bilinéaire.
ϕ est alternée $\iff$ ϕ est antisymétrique.

Remarque 2.3.

Soit ϕ une forme bilinéaire sur E, alors

$(*)$ l'application ϕ_s définie par : $\phi_s(x,y) := \frac{\phi(x,y)+\phi(y,x)}{2}$, est **une forme bilinéaire symétrique**.

$(*)$ l'application ϕ_a définie par : $\phi_a(x,y) := \frac{\phi(x,y)-\phi(y,x)}{2}$, est **une forme bilinéaire antisymétrique.**

Et on a $\phi = \phi_s + \phi_a$.

Proposition 2.4.

Toute forme bilinéaire sur E s'écrit de manière unique comme la somme d'une forme bilinéaire **symétrique** et d'une forme bilinéaire **antisymétrique**.

Preuve :

Exemples 2.5

(1) $E = \mathbb{K}$, la multiplication : $m : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $m(x, y) = xy$, est forme bilinéaire symétrique (f.b.s).

Exemples 2.5

(2) $E = \mathbb{K}^n$, l'application : $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, telle que $\phi(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, est forme bilinéaire symétrique (f.b.s).
(où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$).

Exemples 2.5

(3) $E = \mathbb{R}^2$, le produit scalaire usuel $(X, Y) \longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2$, est forme bilinéaire symétrique (f.b.s).
(où $X = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$).

Exemple 2.5

(4) $E = \mathfrak{C}([-1,1],\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues de $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$\forall (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ est une f.b.s.

Exemple 2.5

(5) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'espace des matrices carrées d'ordre n.
L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$\forall (A,B) \in E \times E, \quad \varphi(A,B) = Tr({}^tA.B)$ est bien une f.b.s.

Rappel : $Tr(A) = \sum_{i+1}^{n} a_{ii}$ où $A = (a_{ii})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
et on a $Tr(AB) = Tr(BA)$.

2.2. Forme bilinéaire non dégénérée (régulière).

E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

définition 2.6

Une forme bilinéaire symétrique ϕ sur E est dite :

1. **non dégénérée** (ou régulière) si, $(\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E)$ implique $x = 0$.
2. **positive** si, $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
3. **définie** si, $\phi(x, x) = 0 \implies x = 0$.
4. **définie positive** si, $\phi(x, x) > 0$ pour tout $x \in E \backslash \{0\}$.

Remarque : Un produit scalaire sur E est une f.b.s définie positive.

Remarque

Le noyau d'une une forme bilinéaire symétrique ϕ sur E est défini par : $\ker(\phi) = \{x \in E / \phi(x, y) = 0 \quad pour \quad tout \quad y \in E\}$.
ϕ est **non dégénérée** $\iff \ker(\phi) = \{0\}$.

Remarque 2.7

On peut également parler de non dégénérescence pour une forme bilinéaire antisymétrique.
Par contre, la notion de définie positive est sans intérêt dans ce cas, car si ϕ est antisymétrique alors $\phi(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Proposition 2.8

Soit ϕ forme bilinéaire symétrique sur E.
ϕ est définie positive $\Longrightarrow$ ϕ est non dégénérée.

Preuve :
Soit ϕ forme bilinéaire symétrique sur E définie positive.
Supposons, par l'absurde, que ϕ est dégénérée,
donc $\exists x \in E$, non nul, tel que $\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$.
en particulier, pour $y = x$ on obtient $\phi(x, x) = 0$
ce qui est contraire à l'hypothèse.

2.3. Orthogonalité pour les f.b.s.

Définition 2.9 :

Soit ϕ forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E. ET soient $x, y \in E$.

1. On dit que x et y sont **orthogonaux** relativement à ϕ si $\phi(x, y) = 0$.
   on note $x \perp_\phi y$ (ou simplement $x \perp y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté).

$$x \perp_\phi y \iff \phi(x, y) = 0.$$

2. Un vecteur x est dit **isotrope** si, $\phi(x, x) = 0$, c.à.d x est orthogonal à lui même.
   L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé : **le cône isotrope** de ϕ, il est noté $C_0(\phi)$**.**

$$C_0(\phi) = \{x \in E / \phi(x, x) = 0\}.$$

3. Un sous espace vectoriel F, de E, est dit **isotrope** s'il existe $x \in F$ $(x \neq 0)$ orthogonal à F tout entier.

Exemple 2.10 :

$E = \mathbb{R}^3$, On considère l'application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\phi(X, Y) = xx' + yy' - zz'$ pour tout $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ de E.

$(*)$ ϕ est bien une forme bilinéaire symétrique.

$(*)$ Déterminer $C_0(\phi)$, le cône isotrope de ϕ.

Question : Est ce que $C_0(\phi)$ est un sous espace vectoriel de E.

Remarque.

(1) Le cône isotrope de ϕ n'est pas, en général, sous espace vectoriel de E.

(2) Le noyau d'une f.b.s ϕ est $\ker \phi = \{x \in E / \forall y \in E \quad x \perp_\phi y\}$.

Définition 2.11 :

Soit F un sous espace vectoriel de E et ϕ une f.b.s sur E.
On appelle orthogonal de F, noté $F^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{x \in E / \forall y \in F : \phi(x,y) = 0\} \\ &= \{x \in E / \forall y \in F : \quad x \perp_{\phi} y\} \end{aligned}$$

$(*)$ $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.
$(*)$ En général, $F \cap F^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
En effet : Si F est isotrope c-à-d il contient un vecteur non nul x orthogonal à F tout entier.
Donc $x \in F^{\perp}$.
$(*)$ On dit que F est totalement isotrope si $F \subset C_0(\phi)$.

Exemple 2.12

$E = \mathbb{R}^3$, on considère ϕ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$
Pour tout $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$: $\phi(X, Y) = xx' + yy' + zz'$.
L'orthogonal d'une droite D est bien le plan vectoriel orthogonal.

Proposition 2.13

Soit ϕ une f.b.s non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
Pour tout sous espace vectoriel F de E on a :

$$dim(F) + dim(F^{\perp}) = dimE = n$$

De plus

$$(F^{\perp})^{\perp} = F.$$

La preuve est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2.14

Soit Soient $B = \{e_1, ..., e_1\}$ une base de E et ϕ une f.b.s non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors la matrice $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ pour tout $i, j = 1...n$, est inversible.

Preuve du lemme :
Rappel :

$$\begin{aligned} M \quad est \quad inversible \quad &\Longleftrightarrow \quad U_M \quad est \quad inversible, \\ &\Longleftrightarrow \quad \ker(U_M) = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad (MX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0). \end{aligned}$$

Soit, donc, $X = (x_1, ..., x_1)$ tel que $MX = 0$.
Donc $\sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j)x_j = 0$ pour tout $i = 1....n$
$\Longrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} \phi(e_i, e_j x_j) = 0$ pour tout $i = 1....n$
$\Longrightarrow$ $\phi(e_i, X) = \phi(e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j x_j) = 0$ pour tout $i = 1....n$
$\Longrightarrow$ $\forall Y \in E : \phi(X, Y) = 0$.
Comme ϕ est non dégénérée, alors $X = 0$,
ce qui montre que la matrice M est inversible.

Preuve de la Proposition :

Question : Est ce que La restriction d'une f.b.s non dégénérée, à un sous espace vectoriel, est aussi non dégénérée ?

Exemple 2.15

$E = \mathbb{K}^2$, on considère $\phi : E \longrightarrow E$ telle que : $\phi(X, Y) = xx' - yy'$, où $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$.
$(-)$ ϕ est bien une f.b.s non dégénérée sur E.
$(-)$ On considère $F = \{(x, y) \in E / x = y\}$ (c'est la première bissectrice) c'est un sous espace vectoriel de E.
Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y') \in F$, donc $x = y$ et $x' = y'$.
On a $\phi(u, v) = xx' - yy' = 0$
ce qui montre que ϕ/F (la restriction de ϕ à F) est dégénérée.
Conclusion : La restriction d'une f.b.s non dégénérée n'est pas nécessairement non dégénérée.
D'où la définition suivante :

Définition 2.16

Soit ϕ une f.b.s non dégénérée sur un espace vectoriel E.
Un sous espace vectoriel F de E sur lequel la restriction de ϕ est non dégénérée est appelé : **sous espace non dégénéré.**

Proposition 2.17

Soit ϕ une f.b.s non dégénérée sur un espace vectoriel E, et F un sous espace vectoriel de E.
F est non dégénéré $\iff$ $E = F \oplus F^{\perp}$.
De plus, dans ce cas, $F^{\perp}$ est aussi non dégénéré

2.4 Bases orthogonales.

Définition 2.18

Soit ϕ une f.b.s sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Une base $B = \{e_1, ..., en\}$, de E, est dite orthogonale pour ϕ, si
$\phi(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i, j = 1...n$ tel que $i \neq j$

Théorème 2.19

Soit ϕ une f.b.s sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Il existe une base B de E formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.

Preuve : C'est par récurrence sur $n = dim(E)$.

3. Matrice d'une forme bilinéaire.

3.1. Matrice d'une forme bilinéaire.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Et $B\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.
Si $u, v \in E$ alors $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.
Soit ϕ une f.b sur E.On a alors :
$\phi(u, v) = \phi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i)$
$\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(e_i, e_j)$
On pose $\phi(e_i, e_j) = a_{ij}$.
Si ϕ est symétrique on aura : $\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$
$\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$

C'est l'écriture polynomiale de ϕ.
Cela montre que l'expression analytique de ϕ est entièrement déterminée dès que l'on connaît la valeur de $\phi(e_i, e_j)$

Définition 3.1

Soit ϕ une f.b sur E
La matrice de ϕ relativement à $B = \{e_1, ..., e_n\}$, une base de E, est la matrice :

$$M_B(\phi) := (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

où $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ pour tout $i, j = 1....n$.

Si X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de u et v, alors

$$\phi(u, v) = {}^t X.M.Y.$$

où ${}^t X$ est la transposée du vecteur conlonne X.

Proposition 3.2

Soit ϕ une f.b sur E
(1) ϕ est symétrique $\iff$ la matrice M est symétrique, $(M^t = M)$.
(2) ϕ est antisymétrique $\iff$ la matrice M est antisymétrique $(M^t = -M)$.
(3) ϕ est non dégénérée $\iff$ la matrice M est inversible.

Exemples 3.2

(1) Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $u = (x, y)$ et $v = (x', y') : \phi(u, v) = xx' + yy'$.
$B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
$\phi(e_1, e_1) = 1$; $\phi(e_1, e_2) = 0$
$\phi(e_2, e_1) = 0$; $\phi(e_{21}, e_2) = 1$.
donc

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Remarque : si X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de u et v, alors

$$\phi(u, v) = X^t M_B(\phi) Y.$$

Exemples 3.2

(2) $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$:
$\phi(u, v) = 2xx' + 7yy' + 3xy' - xz' + 3yx' - zx'$.
(a) Vérifier que f est une f.b sur E.
(b) Déterminer la matrice de f par rapport à la base B.
(c) L'application f est-elle symétrique.

Exemples 3.2

(3) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{1, X, X^2\}$ sa base canonique.
Soit $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
Pour tout $P, Q \in E$: $g(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)de$.
(a) Vérifier que f est une f.b.s sur E.
(b) Déterminer la matrice de f par rapport à la base B.
(c) Déterminer l'écriture polynomiale de g.

Remarque 3.3

La donnée de la matrice $M_B(\phi)$ de l'application ϕ relativement à une base B permet de retrouver l'écriture analytique de ϕ.
En effet Soient X et Y sont les vecteurs colonnes formés des coordonnées de u et v, alors

$$\phi(u, v) = X^t M_B(\phi) Y.$$

Exemple : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

définie la f.b.s suivante :

3.2. changement de bases.

Rappel

Soient $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B = \{e'_1, ..., e'_n\}$ deux bases de E.
La matrice de passage de B à B' est la matrice (inversible) P dont la j^{em} colonne est formée des coordonnées de e'_j dans la base B.
Pour un vecteur $u \in E$, si X (resp. X') est le vecteur colonne formé des coordonnées de u dans la base B (resp. B') alors :

$$X = PX'.$$

Pour un endomorphisme f de E. Si M (resp. M') la matrice de f dans la base B (resp. B') alors :

$$M' = P^{-1}MP.$$

3.2. changement de bases.

Proposition 3.4

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E : un espace vect de dimension n.
Soient $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ deux bases de E et P La matrice de passage de B à B'.
si $M_B(\phi)$ est la matrice de ϕ par rapport à la base B
alors la matrice de ϕ par rapport à la base B' est :

$$M_{B'}(\phi) = P^t M_B(\phi) P.$$

Où P^t désigne la transposée de P.

Preuve : 28 29

Remarque 3.5

Si A est une matrice carrée **symétrique** d'ordre n et P une matrice inversible
alors la matrice $A' = P^t AP$ est aussi **symétrique**.
On dit que A et A' sont **congruentes**.
La relation de congruence des matrices est une relation d'équivalence.

Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

(1) Écrire la f.b.s f associée à A.
(2) Vérifier que $B = \{u = (2,3), v = (1;1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Donner la matrice de ϕ par rapport à la nouvelle base B.

Exemples 3.6

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :
$\phi(X, Y) = 3xx' - 5yy' - 2xy' - 2x'y + 3yz' + 3y'z$ pour tout $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$.
(1) Montrer que ϕ est une f.b.s.
(2) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.

Exercice

Écrire la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Proposition 3.7

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E : un espace vect de dimension n.
Si $B = \{e_1, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ sont deux bases de E, alors les matrices $M_B(\phi)$ et $M_{B'}(\phi)$ ont le même rang.

3.3. Bilinéarité et Dualité.

Soit E un espace vectoriel et E^* sont dual.
soit $b : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique.
Pour tout $x \in E$, l'application $b(., x) : E \to \mathbb{K}$ définie par $b(., x)(y) = b(y, x)$, est une forme linéaire sur E.
c.à.d $b(., x) \in E^*$.

Proposition 3.7

L'application $\varphi_b : E \to E^*$, définie par $\varphi_b(x) = b(., x)$, est une linéaire.
φ_b est appelée : application linéaire de E dans son dual associée à la forme bilinéaire symétrique b.
Si $dim(E) = n$ et $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E, alors les applications b et φ_b ont même matrice par rapport à la base B.
c.à.d $M_B(b) = M_{BB^*}(\varphi_b)$.

Remarque 3.8

Si $dim(E) = n$ alors :
$(*)$ L'application φ_b est isomorphisme d'espaces vectoriels ;
$(*)$ $rg(b) = rg(\phi)$.

Remarque 3.8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et b une forme bilinéaire symétrique sur E.
Alors, pour toute forme linéaire $F \in E^*$ il existe un un unique vecteur $x \in E$ tel que : $f = b(., x)$
c.à.d $\forall y \in E : \quad f(y) = b(x, y)$.